EX11

1) $t > 0$

$$(t + \frac{1}{t}) - 2 = \frac{t^2 + 1 - 2t}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$$

D'où $(t + \frac{1}{t}) \geq 2$, pour $t > 0$

2) * pour $t = e^{\frac{x}{2}} > 0$ on a: $\frac{1}{t} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{x}{2}}$

on aura : $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \geq 2$

* $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \geq 2 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) \geq 2e^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow e^x + 1 \geq 2e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \text{Ln}(e^x + 1) \geq \text{Ln}(2e^{\frac{x}{2}})$

$\Rightarrow \text{Ln}(e^x + 1) \geq \text{Ln}\,2 + \text{Ln}(e^{\frac{x}{2}})$

$\Rightarrow \text{Ln}(e^x + 1) \geq \frac{x}{2} + \text{Ln}\,2$

EX12

1) * $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow \boxed{e^x - 1 \geq 0}$ (1)

* On pose $U(x) = x e^x - e^x + 1$;

$x \in [0, +\infty[$

$U'(x) = x e^x \geq 0$

U est croissante sur $[0, +\infty[$

$x \geq 0 \Rightarrow U(x) \geq U(0)$

$\Rightarrow U(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x e^x - e^x + 1 \geq 0}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 0 \leq e^x - 1 \leq x e^x \quad \forall x \in \text{IR}_+$

2) $x \geq 0$

Pour $t \in [0, x]$, on a :

$0 \leq e^t - 1 \leq t e^t \Rightarrow 0 \leq e^t - 1 \leq t e^x$

Car $e^t \leq e^x$

Donc :

$$0 \leq \int_0^x (e^t - 1).dt \leq \int_0^x te^x.dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left[e^t - t\right]_0^x \leq e^x \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$$

EX13

$$f(x) = \frac{2 + e^x}{1 + e^x}$$

1) $f(x) = \dfrac{2(1 + e^x) - e^x}{1 + e^x}$

$$= 2 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Donc a = 2 et b = – 1

2) $\int_0^1 f(x)dx = \left[2x - Ln(1 + e^x)\right]_0^1$

$= 2 - \ln(1 + e) + \text{Ln}2$

$= 2 + \text{Ln}(\frac{2}{1 + e})$

EX14

$Df = \text{IR}$

$f(x) = x - 2 + e^{-\frac{x}{2}}$

1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}$

$= \frac{2e^{\frac{x}{2}} - 1}{2e^{\frac{x}{2}}}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -2\text{Ln}2$

x	$-\infty$	$-2\text{Ln}2$	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-2\text{Ln}2$	↗ $+\infty$

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn